

MATEMÁTICA APLICADA

Modelagem e otimização do custo de transporte

Trabalho prático de modelagem e otimização
para tomada de decisão

Marcos Matos dos Santos

3 de outubro de 2026

1 Introdução e definição do modelo

Este trabalho aplica funções, limites e derivadas ao custo de uma operação de transporte. O objetivo é determinar a velocidade média que minimiza o custo por quilômetro e comparar essa alternativa com uma entrega urgente a 90 km/h em uma rota de 240 km. O mínimo da função ocorre em aproximadamente 26,21 km/h e corresponde a R\$ 5,151214/km.

O enunciado apresenta uma empresa de logística que transporta cargas leves entre cidades. O custo por quilômetro reúne combustível e desgaste, proporcionais ao quadrado da velocidade, e custos associados ao tempo, que diminuem por quilômetro quando a velocidade aumenta:

$$C(v) = 0,0025v^2 + \frac{90}{v} \text{ para } v > 0$$

O domínio é $v > 0$. A variável v representa velocidade média em km/h, e $C(v)$ representa custo em R\$/km. O termo $90/v$ pode ser interpretado como R\$ 90/h distribuídos pelos quilômetros percorridos em uma hora. Os coeficientes são dados do exercício. A distância e a velocidade média são tratadas como suficientes para calcular o tempo modelado, sem pausas adicionais.

2 Comportamento limite

2.1 Velocidade próxima de zero

Quando v tende a zero pela direita, $0,0025v^2$ tende a zero e $90/v$ tende a $+\infty$. Portanto, $C(v)$ tende a $+\infty$. O tempo necessário por quilômetro aumenta sem limite, elevando salários e depreciação por tempo distribuídos por quilômetro. A velocidade zero não pertence ao domínio e não permite concluir uma viagem com distância positiva.

2.2 Velocidade muito alta

Quando v tende a $+\infty$, $90/v$ tende a zero e $0,0025v^2$ tende a $+\infty$. Assim, $C(v)$ também tende a $+\infty$. O componente quadrático passa a dominar. Os limites descrevem o comportamento matemático e não supõem velocidades fisicamente ilimitadas.

3 Tabela de sensibilidade

Para cada velocidade solicitada, calculam-se separadamente os dois termos e depois sua soma. Por exemplo, $C(30) = 0,0025 \times 900 + 90/30 = 2,25 + 3 = 5,25$ R\$/km.

Tabela 1 Custo por quilômetro nas velocidades solicitadas, em R\$/km

v (km/h)	$0,0025v^2$	$90/v$	C(v)
30 km/h	2,250	3,000	5,250
50 km/h	6,250	1,800	8,050
60 km/h	9,000	1,500	10,500
80 km/h	16,000	1,125	17,125
100 km/h	25,000	0,900	25,900

Em 80 km/h, o custo exato é R\$ 17,125/km, exibido como R\$ 17,13/km quando se usam centavos. Mantêm-se valores completos nos cálculos de custo total e percentual. Entre as cinco velocidades, 30 km/h oferece o menor custo. Isso não demonstra o mínimo da função, pois a tabela não percorre todo o domínio.

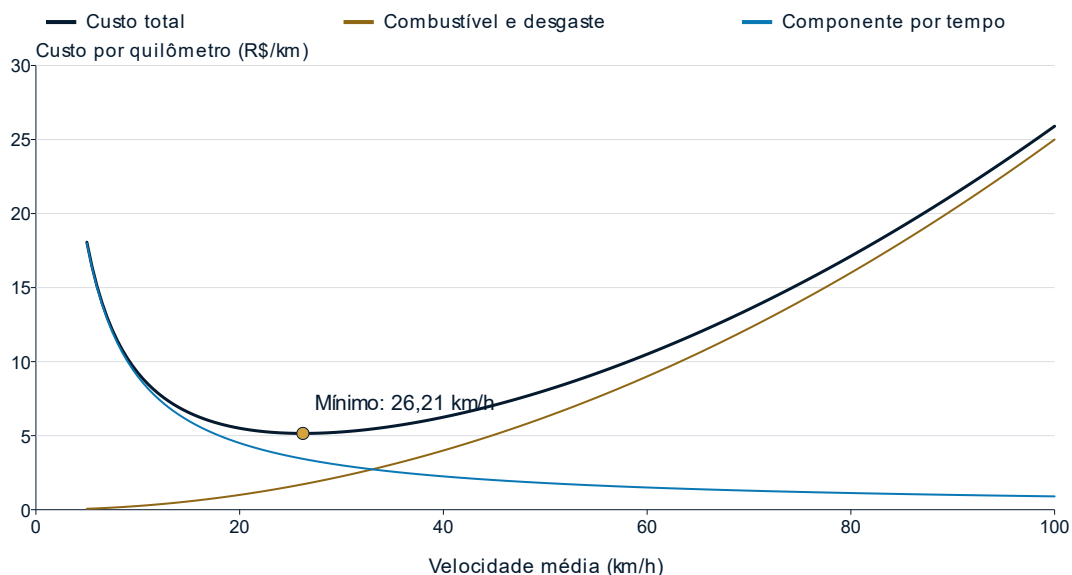


Figura 1 Custo total por quilômetro e seus componentes. Fonte: elaboração própria a partir do modelo do enunciado. O mínimo está em aproximadamente 26,21 km/h.

A função total inclui um termo quadrático e um termo inverso. Ela não é uma parábola. Os cinco pontos da tabela ficam à direita do mínimo contínuo e pertencem à região crescente da função.

4 Otimização da velocidade média

Reescreve-se a função como $C(v) = 0,0025v^2 + 90v^{-1}$. A regra da potência fornece a derivada:

$$C'(v) = 0,005v - \frac{90}{v^2}$$

A condição necessária de ponto crítico é $C'(v) = 0$. Como $v > 0$, multiplicar a equação por v^2 preserva suas soluções no domínio:

$$0,005v^3 = 90$$

$$v^3 = 18.000$$

$$v^* = \sqrt[3]{18.000} \approx 26,20741394 \text{ km/h}$$

A raiz positiva é única. Além disso, $C'(v) = (0,005v^3 - 90)/v^2$. O denominador é positivo. A derivada é negativa antes de v^* e positiva depois de v^* , demonstrando que o custo diminui e depois aumenta.

4.1 Justificativa do mínimo global

$$C''(v) = 0,005 + \frac{180}{v^3} > 0$$

A segunda derivada é positiva em todo $v > 0$. Portanto, C é estritamente convexa e o ponto crítico é seu único mínimo global. Essa conclusão também é consistente com os limites positivos infinitos nos extremos. A análise segue os critérios de pontos críticos e extremos apresentados por Strang e Herman (2016, seções 4.3 e 4.7).

4.2 Custo mínimo correspondente

A condição do ótimo implica $90/v^* = 0,005(v^*)^2$. Substituindo essa relação na função, a soma dos componentes é $0,0075(v^*)^2$:

$$C(v^*) = \frac{3(v^*)^2}{400} \approx 5,15121409149 \text{ R\$/km}$$

Os componentes no ótimo são R\$ 1,717071/km para combustível e desgaste e R\$ 3,434143/km por tempo. O componente por tempo é o dobro do quadrático. A velocidade e os custos intermediários permanecem sem arredondamento antecipado.

5 Aplicação à rota de 240 km

O custo total $K(v)$ é a distância multiplicada pelo custo por quilômetro: $K(v) = 240 C(v)$. O tempo modelado é $T(v) = 240/v$, em horas.

5.1 Viagem na velocidade econômica

$K(v^*) = 240 \times 5,15121409149 \approx \text{R\$ } 1.236,29$. O tempo é $T(v^*) = 240/26,20741394 \approx 9,157714$ h, aproximadamente 9h09min28s.

5.2 Entrega urgente a 90 km/h

$C(90) = 0,0025 \times 90^2 + 90/90 = 20,25 + 1 = \text{R\$ } 21,25/\text{km}$. Assim, $K(90) = 240 \times 21,25 = \text{R\$ } 5.100,00$. O tempo modelado é $240/90 = 2,666667$ h, ou 2h40min.

Tabela 2 Comparação da rota de 240 km

Indicador	Mínimo matemático	Urgência a 90 km/h
Velocidade média	26,207414 km/h	90 km/h
Custo por km	R\$ 5,151214	R\$ 21,25
Custo total	R\$ 1.236,29	R\$ 5.100,00
Tempo modelado	9h09min28s	2h40min

5.3 Diferença absoluta e percentual

O aumento absoluto é $\Delta K = 5.100 - 1.236,29138196 = \text{R\$ } 3.863,70861804$, exibido como R\$ 3.863,71.

$$\text{Aumento} = \frac{5.100 - 1.236,29138196}{1.236,29138196} \times 100 \approx 312,52\%$$

O custo final equivale a 412,52% do custo mínimo. O acréscimo é 312,52%, pois se descontam os 100% da base de comparação. A urgência economiza aproximadamente 6h29min28s no tempo modelado, com o aumento de custo apresentado.

6 Análise crítica da decisão

Minimizar o custo de combustível, desgaste e tempo representado na equação não basta para decidir uma operação real. O resultado depende das hipóteses e dos coeficientes do modelo. Uma velocidade média de 26,21 km/h pode não atender ao prazo ou às condições operacionais da rota.

O planejamento deve considerar segurança, características e limites das vias, trânsito, relevo, clima, carga, manutenção, pedágios, pausas, condições de trabalho e consequências do atraso. Alguns fatores delimitam alternativas admissíveis; outros acrescentam custos ou variabilidade. A velocidade média não equivale à velocidade instantânea de condução.

Os coeficientes foram fornecidos pelo exercício. Para uso real, seria necessário medir dados da frota, estimar parâmetros e verificar se o modelo representa as condições observadas. O valor encontrado é uma referência analítica, que precisa ser confrontada com exigências da operação.

6.1 Extensão didática com prazo

Como hipótese adicional, considera-se prazo máximo de quatro horas para a mesma rota e teto de velocidade média de 90 km/h. Essa extensão não modifica as respostas do enunciado original.

$$\frac{240}{v} \leq 4 \text{ implica } v \geq 60$$

A faixa viável é de 60 a 90 km/h. Como C é crescente acima de v^* , o mínimo nessa faixa ocorre em 60 km/h. $C(60) = 9 + 1,5 = \text{R\$ } 10,50/\text{km}$. O custo total é $240 \times 10,5 = \text{R\$ } 2.520,00$.

Com prazo de duas horas, seria necessário $v \geq 120$ km/h. Se o teto permanece em 90, a faixa viável fica vazia. O resultado adequado é reconhecer a inviabilidade e rever o planejamento.

6.2 Relação com a gestão pública

A mesma lógica pode orientar uma investigação sobre distribuição de materiais entre unidades públicas. A aplicação exigiria custos próprios, prazos e indicadores de qualidade. O ganho está em tornar explícitas as condições consideradas e a justificativa da decisão, sem transportar automaticamente os coeficientes deste exercício para uma frota pública.

7 Produto educacional e conclusão

O estudo originou o laboratório Decisão em Movimento, com exploração de velocidade, custo e tempo, comparação de cenários, restrições didáticas de prazo e cinco desafios com feedback. O protótipo tem arquivos próprios e acesso por um artigo no site pessoal.

O percurso pedagógico propõe uma previsão inicial, exploração da curva, comparação com a tabela e justificativa do mínimo pela derivada. O desafio de prazo ajuda a distinguir o mínimo sem restrições do mínimo entre alternativas viáveis. A pontuação registra respostas corretas e permite novas tentativas, sem constituir uma avaliação validada de aprendizagem.

Conclui-se que a velocidade de mínimo custo do modelo é $v^* = \sqrt[3]{18.000} \approx 26,207414$ km/h, com $C(v^*) \approx \text{R\$ } 5,151214/\text{km}$. A rota de 240 km custa R\$ 1.236,29 nesse ponto. A 90 km/h, a viagem custa R\$ 5.100,00, um aumento de R\$ 3.863,71 ou 312,52% em relação ao mínimo.

A solução responde às partes de análise, otimização e aplicação do enunciado. A decisão operacional deve combinar esse cálculo com prazos, condições admissíveis e dados representativos. A matemática contribui para comparar alternativas e justificar escolhas de forma verificável.

Referências

TRABALHO PRÁTICO DE MATEMÁTICA APLICADA. Modelagem e Otimização para Tomada de Decisão. Enunciado da atividade, duas páginas fornecidas pelo docente, 2026.

STRANG, Gilbert; HERMAN, Edwin. Calculus Volume 1. Houston: OpenStax, 2016. Seção 4.3, Maxima and Minima. Disponível em: <https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-3-maxima-and-minima>. Acesso em: 30 set. 2026.

STRANG, Gilbert; HERMAN, Edwin. Calculus Volume 1. Houston: OpenStax, 2016. Seção 4.7, Applied Optimization Problems. Disponível em: <https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-7-applied-optimization-problems>. Acesso em: 30 set. 2026.